衡齋算學

丙辰仲冬若友西學孟嘉屬撰推五星伏見通法遂求黃赤之交變尋弧角之比例除總較法不便用對數外試以邊角相求之法樓其銳鈍大小則窮又試以垂弧法推次形又次形紛紛葛藤不可收拾至樓其銳鈍大小亦窮乃屏弃成言渺慮靜觀始覺象數俱顯因錄爲條目弁通法定例各種取最在吳門所論次形數紙合爲一冊孟嘉一見爲之鼓掌余嘗攷垂弧法有檄

形內異類則垂弧在形外由今梅之確不可易
致次形法有梅氏所引歷學會通之說謂別算
一三角其邊為此角一百八十度之餘由今梅
之無不可通梅氏皆斥之甚矣索解人之難也
若此冊得孟嘉可無憾已雖然持戒者言仰觀
星宿推步盈虛麻數算計皆所不應孟嘉其何
以解我歙汪萊

弧三角形

弧角比例銳鈍大小知不知條目

對角求對邊

一原所知角銳對邊大又所知角銳所求對邊

恆小

一原所知角銳對邊大又所知角鈍所求對邊

恆大

一原所知角銳對邊足九十度與對邊大同

一原所知角銳對邊小又所知角銳審又所知角小於原所知角則所求對邊小若大於原所知角則不能定

一原所知角銳對邊小又所知角鈍審又所知角之外角小於原所知角則所求對邊大若大於原所知角則不能定

一原所知角鈍對邊小又所知角鈍所求對邊恆大

一原所知角鈍對邊小又所知角銳所求對邊

極小

一原所知角鈍對邊足九十度與對邊小同

一原所知角鈍對邊大又所知角鈍審又所知角大於原所知角則所求對邊大若小於原所知角則不能定

一原所知角鈍對邊大又所知角銳審又所知角小於原所知角之外角則所求對邊小若大於原所知角之外角則不能定

一原所知無論角銳對邊小角鈍對邊大但又所知角正九十度者所求對邊皆不能定

一原所知角正九十度對邊無論大小足又所知角銳所求對邊恆小又所知角鈍所求對邊恆大

對邊求對角

一原所知邊小對角鈍又所知邊小所求對角恆銳

一原所知邊小對角鈍又所知邊大所求對角

恆鈍

一原所知邊小對角正九十度與對角鈍同

一原所知邊小對角銳又所知邊小審又所知邊小於原所知邊則所求對角銳若大於原所知邊則不能定

一原所知邊小對角銳又所知邊大審又所知邊較兩象限之餘小於原所知邊則所求對角鈍若大於原所知邊則不能定

一原所知邊大對角銳又所知邊小所求對角

恆銳

一原所知邊大對角銳又所知邊大所求對角

恆鈍

一原所知邊大對角正九十度與對角銳同

一原所知邊大對角鈍又所知邊大審又所知邊大於原所知邊則所求對角鈍若小於原所知邊則不能定

一原所知邊大對角鈍又所知邊小審又所知邊較兩象限之餘大於原所知邊則所求對角

銳若小於原所知邊則不能定

一原所知無論邊大對角鈍邊小對角銳但又所知邊足九十度者所求對角皆不能定

一原所知邊足九十度對角無論銳鈍正又所知邊大所求對角恆鈍又所知邊小所求對角恆銳

附錄弧角比例算法（凡附錄皆古法）

對角求對邊

一率原所知角正弦

二率所知對邊正弦
三率又所知角正弦
四率所求對邊正弦

對邊求對角
一率原所知邊正弦
二率所知對角正弦
三率又所知邊正弦
四率所求對角正弦

正弧三角銳鈍大小相從條目

一交角銳上弧對正角弧大下弧對餘角弧大必畧長於上弧餘角鈍此角之外角必大於交角減象限之餘弧對弧對交角弧小必小於交角度

一交角銳上弧小下弧小必畧短於上弧餘角銳此角必大於交角減象限之餘弧對弧小必小於交角度

一交角銳上弧足下弧足餘角正對弧即交角度

一交角正上弧足下弧即餘角度餘角銳對弧足

一交角正上弧足下弧即餘角度餘角鈍對弧足

足

一交角正上弧足下弧足餘角正對弧足

一交角鈍上弧大下弧小餘角銳此角必大於交角去象限之餘弧對弧大必大於交角度

一交角鈍上弧小下弧大餘角鈍此角之外角必大於交角去象限之餘弧對弧大必大於交角度

一交角鈍上弧足下弧足餘角正對弧即交角度

正算

一所知一邊在所知兩角之間法以所知邊爲上弧先任以所知一角爲交角用正弧三角法求得下弧對弧餘角三件以所知又一角與此餘角相減餘又爲交角前對弧爲下弧用正弧三角法求得上弧對弧餘角三件後所求得之上弧常爲對先用所知角不知之邊再審所知又一角大於前餘角則後餘角卽爲不知之角後對弧與前下弧相加爲對所知又一角不知

之邊若所知又一角小於前餘角則後餘角之
外角爲不知之角後對弧與前下弧相減餘爲
對所知又一角不知之邊
一所知一角在所知兩邊之間法以所知角爲
交角先任以所知一邊爲上弧用正弧三角法
求得下弧對弧餘角三件以所知又一邊與此
下弧相減餘又爲對弧前對弧爲下弧用正弧
三角法求得交角上弧餘角三件後所求得之
上弧常爲不知之邊再審所知又一邊大於前

下弧則後餘角即爲對先用所知邊不知之角
後交角與前餘角相加爲對所知又一邊不知
之角若所知又一邊小於前下弧則後餘角之
外角爲對先用所知邊不知之角後交角與前
餘角相減餘爲對所知又一邊不知之角
一所知兩邊對所知兩角法先任以所知一角
爲交角對所知又一角所知之邊爲上弧用正
弧三角法求得下弧對弧餘角三件又審所知
又一角之鋭鈍與先用所知角相同即以所知

又一角爲交角若所知又一角之銳鈍與先用所知角不同則以所知又一角之外角爲交角前對弧復爲對弧所知對先用所知角之邊爲上弧用正弧三角法求得下弧餘角二件審所知二角銳鈍相同以前後兩下弧相加爲不知之邊前後兩餘角相加爲不知之角若所知二角銳鈍不同以前後兩下弧相減餘爲不知之邊前後兩餘角相減餘爲不知之角

省算

一所知一邊在所知兩角之間法以所知邊爲上弧先任以所知一角爲交角用正弧三角法求得下弧餘角二件以所知又一角與此餘角相減餘爲分角乃以分角之餘弦爲一率前餘角之餘弦爲二率原所知邊切綫爲三率求得四率爲對先用角不知之邊切綫

大小定例

先用角鈍分角鋭此邊大

先用角鈍分角鈍此邊小

先用角銳分角銳此邊小
先用角銳分角鈍此邊大
又以前餘角之切綫為一率前下弧切綫為二
率分角切綫為三率求得四率為加減邊切綫
大小定例
分角銳此邊小
分角鈍此邊大
審所知又一角大於前餘角以此邊與前下弧
相加若小於前餘角以此邊與前下弧相減皆

加減爲對所知又一角不知之邊又以前餘角
之正弦爲一率先用角之餘弦爲二率分角之
正弦爲三率求得四率爲不知之角餘弦

鋭鈍定例

先用角鈍所知又一角大於前餘角此角鈍
先用角鈍所知又一角小於前餘角此角鋭
先用角鋭所知又一角大於前餘角此角鋭
先用角鋭所知又一角小於前餘角此角鈍

一所知一角在所知兩邊之間法以所知角爲

交角先任以所知一邊爲上弧用正弧三角法求得下弧以所知又一邊與此下弧相減餘爲分邊乃以前下弧之餘弦爲一率先用邊之餘弦爲二率分邊之餘弦爲三率求得四率爲不知之邊餘弦

大小定例

原角鈍分邊大此邊小

原角鈍分邊小此邊大

原角銳分邊小此邊小

原角銳分邊大此邊大

又以分邊之正弦為一率前下弧之正弦為二率原所知角之切綫為三率求得四率為對先用邊不知之角切綫

銳鈍定例

原角鈍又一邊大於前下弧此角鈍

原角鈍又一邊小於前下弧此角銳

原角銳又一邊小於前下弧此角鈍

原角銳又一邊大於前下弧此角銳

乃以所得對先用邊之角爲交角所知又一邊
爲上弧用正弧三角法求得下弧置之又以對
原所知角之邊正弦爲一率原所知角之正弦
爲二率所知又一邊之正弦爲三率求得四率
爲對所知又一邊不知之角正弦

銳鈍定例

對先用邊角鈍對原角之邊大於後下弧此
一角鈍
一對先用邊角鈍對原角之邊小於後下弧此

角銳

對先用邊角銳對原角之邊小於後下弧此

角鈍

對先用邊角銳對原角之邊大於後下弧此

角銳

一所知兩邊對所知兩角法先任以所知一角

爲交角對所知又一角之邊爲上弧用正弧三

角法求其下弧審所知又一角之銳鈍與先用

角相同卽以又一角爲交角若與先用角不同

則以又一角之外角爲交角對所知先用角所知之邊爲上弧用正弧三角法求得下弧審所知二角銳鈍相同則前後兩下弧相加若所知二角銳鈍不同則前後兩下弧相減皆加減爲不知之邊復以所知又一角爲交角所得之邊爲上弧用正弧三角法求其下弧置之又以對先用角之邊正弦爲一率先用角之正弦爲二率所得之邊正弦爲三率求得四率爲不知一角之正弦

鋭鈍定例

原又一角鈍對先用角之邊大於後下弧此

角鈍

原又一角鈍對先用角之邊小於後下弧此

角鋭

原又一角鋭對先用角之邊小於後下弧此

角鈍

原又一角鋭對先用角之邊大於後下弧此

角鋭

附錄正弧三角算法五條

有交角與上弧求下弧

一率半徑

二率交角餘弦

三率上弧切綫

四率下弧切綫

有交角與下弧求對弧

一率半徑

二率交角切綫

三率下弧正弦
四率對弧切綫

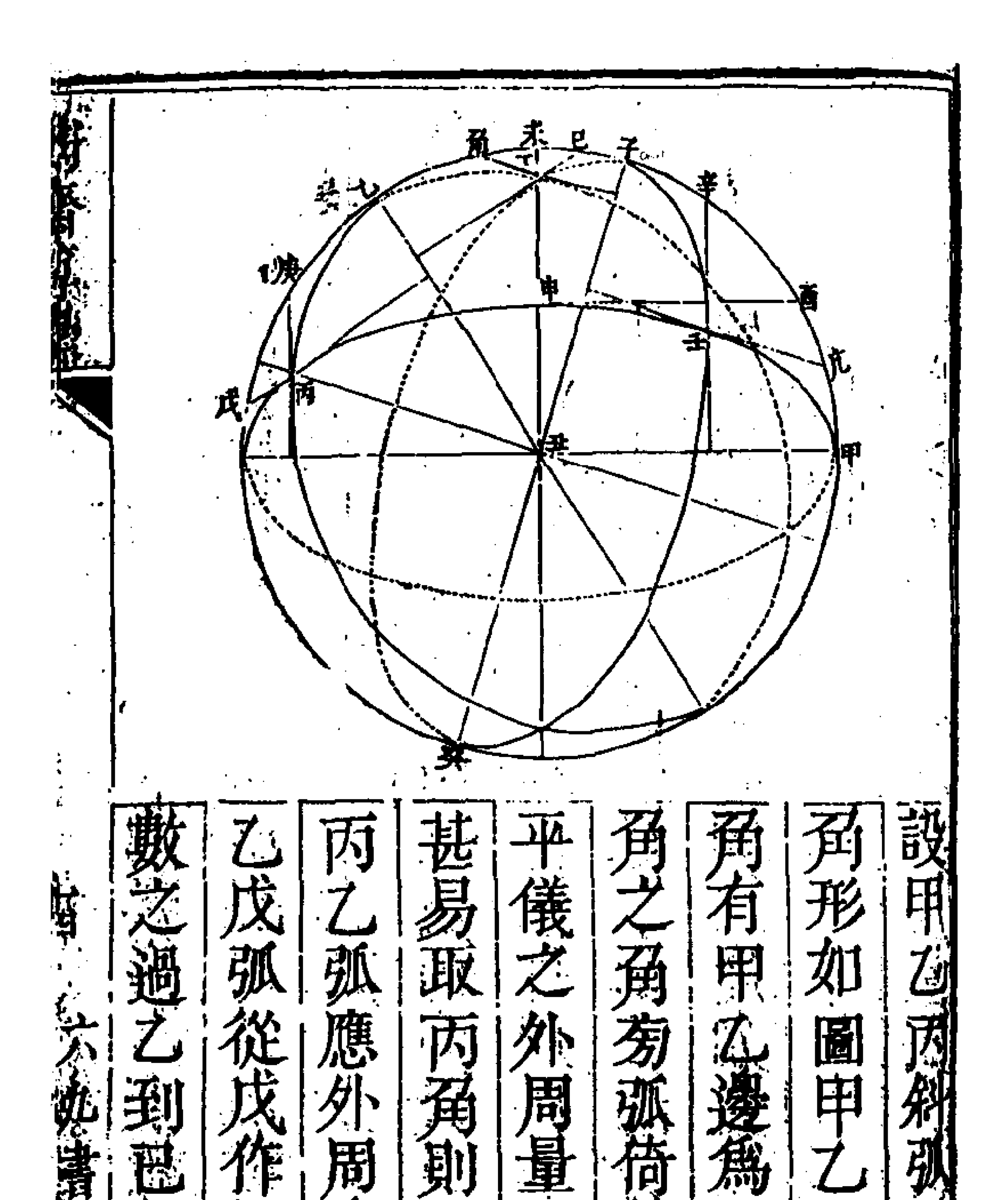
有上下二弧求餘角
一率上弧正弦
二率下弧正弦
三率半徑
四率餘角正弦

有下弧與對弧求交角
二率下弧正弦

二率對弧切綫
三率半徑
四率交角切綫

有交角與下弧求上弧

一率交角餘弦
二率半徑
三率下弧切綫
四率上弧切綫



設甲乙丙斜弧三角形如圖甲乙二角有甲乙邊為一角之角旁弧倚於平儀之外周量取甚易取丙角則視丙乙弧應外周為乙戊弧從戊作識數之過乙到巳得

九十度以乙巳弧應於內下曲弧為乙丁識之又視甲丙弧應外周為甲庚弧從庚作識數之向甲到辛得九十度以庚辛弧應於內上曲弧為丙壬識之乃以兩內上曲弧交角丙對圜心丑作虛直距遂作虛十字橫距割外周於子癸從子割丁到癸作內下曲弧從子割壬到癸作內上曲弧合子丁子壬應外周之度如自角至亢之度即丙角度

附錄有角旁弧在外周量法

如前圖甲乙丙三角形量取甲角

法先從甲點向圜心丑作虛直距

遂作虛十字橫距割上曲弧於申

引之割外周於未乃從申作虛十

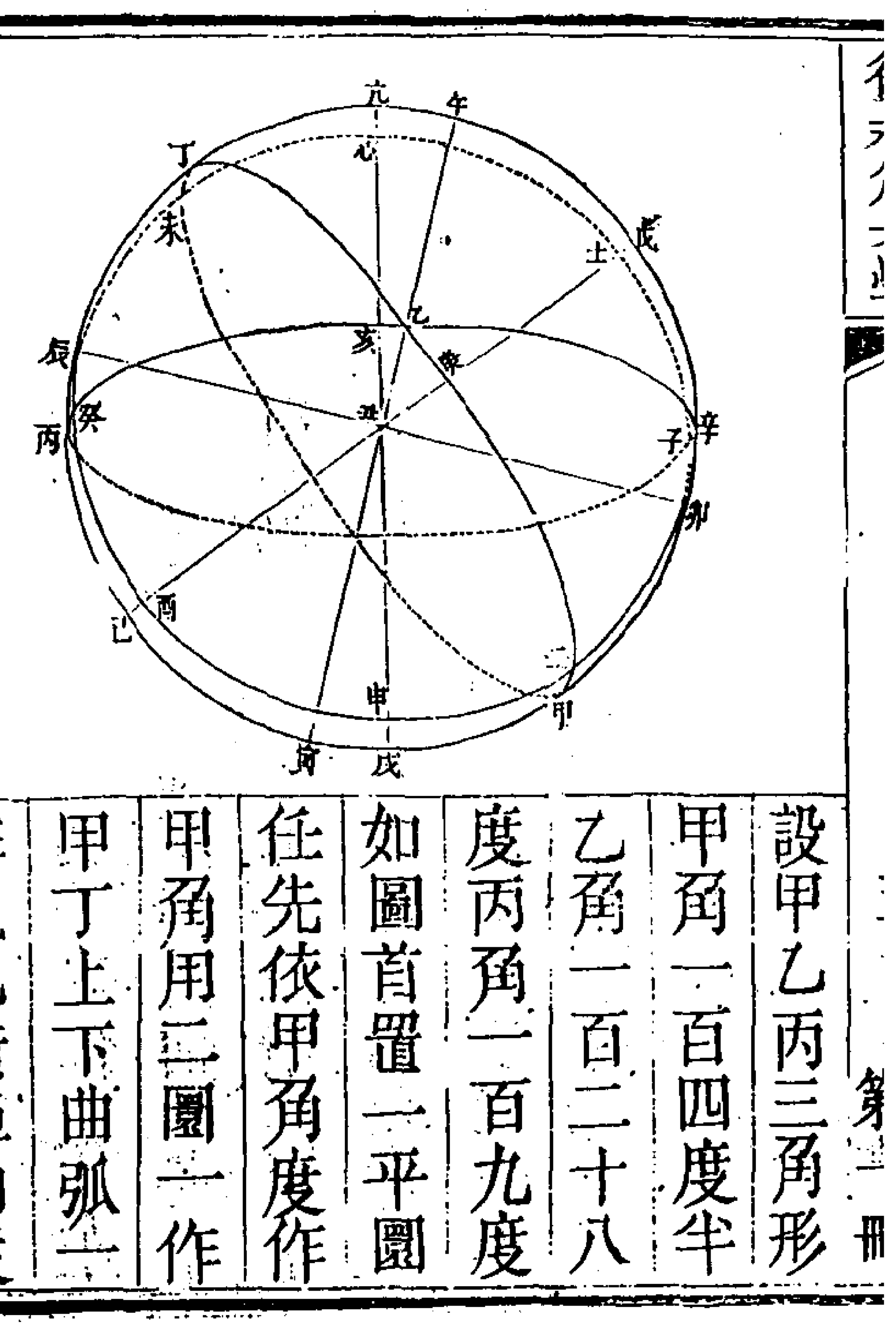
字綫割外周於酉數外周自未至

酉之度即甲角度量取乙角與量

取甲角法同

三角求邊用次形通法

斜弧布角度以明次形之理

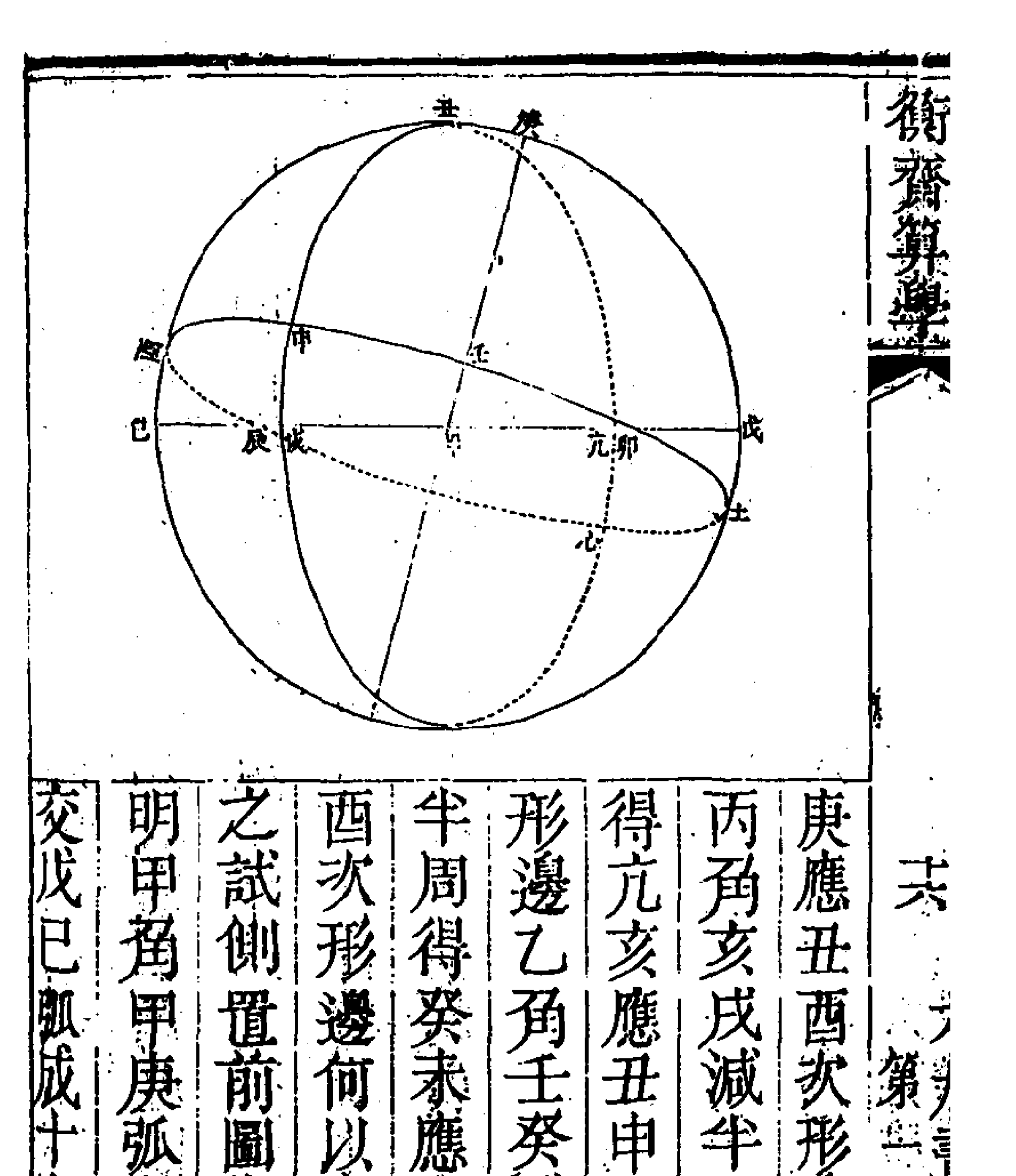


設甲乙丙三角形甲角一百四度半乙角一百二十八度丙角一百九度如圖首置一平圜任先依甲角度作甲角用二圜一作甲丁上下曲弧一作戊巳横距角度

次依丙角度作丙角用二圜一作丙辛上下曲弧虚交於甲丁弧上一作亢戊横距角度隨之又用二圜作卯丑辰午丑寅十字對乙亥角界之又數乙壬得九十度即用一圜作卯辰上曲弧就之視子壬適得乙外角度即繪為眞形不合則遷就之

取次形

知布三角則次形明矣此形若取三外角即應丑申酉次形如前圖以甲角庚巳減半周得戊

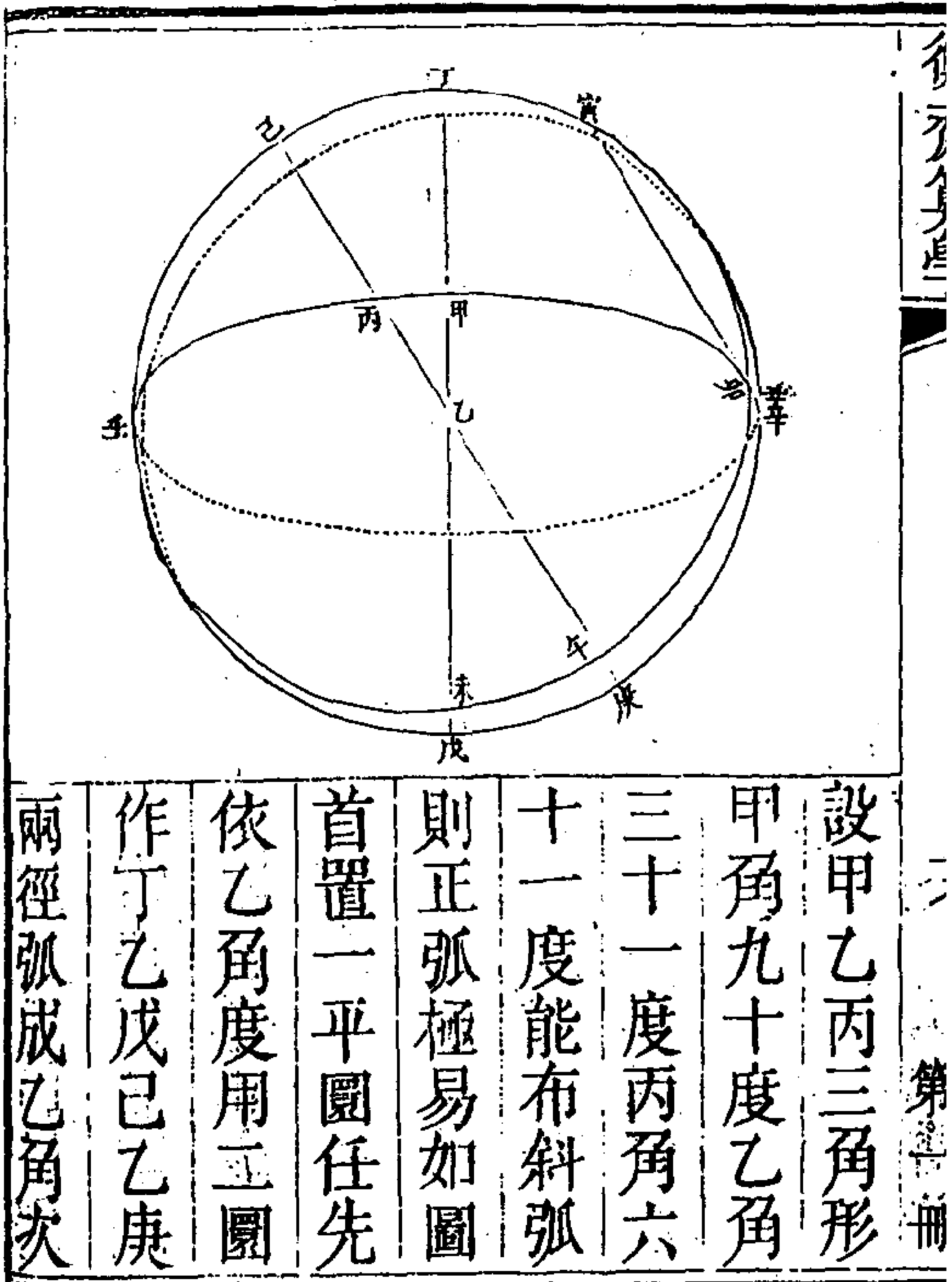


庚應丑酉次形邊丙角亥戌減半周得亢亥應丑申次形邊乙角壬癸減半周得癸未應中酉次形邊何以審之試側置前圖先明甲角爲甲庚弧之交戊巳弧成十字

交卯辰弧亦成十字戊己爲甲庚之角卯辰爲乙壬之角也故卯辰之交戊己常在酉而甲庚弧卽爲酉庚庚角故庚酉常九十度戊丑同庚酉而庚丑爲交數故戊庚同丑酉乙丙二角放此

若取甲外角乙丙兩内角卽應丑心酉次形乙外角甲丙兩内角卽應丑心土次形丙外角甲乙兩内角卽應丑申土次形四形任取理解並通

正弧布角度以明次形之理



設甲乙丙三角形甲角九十度乙角三十一度丙角六十一度能布斜弧則正弧極易如圖首置一平圜任先依乙角度用正圜作丁乙戊己乙庚兩徑弧成乙角次

從庚數到丑得丙角度卽從丑與庚已平行作
丑寅虛距等綫界之乃用一圜作辛甲壬上曲
弧就之視丙卯適足九十度卽繪爲眞形

弧次形

此形任弧連丙角之丙巳壬爲次形丙角與本
形同巳角與甲角同乙角減象限卽得巳壬邊
或弧連乙角之乙午未爲次形乙角與本形同
午角與甲角同丙角減象限卽得午未邊

論曰凡三邊弧相交上下同具四形三角弧相

交上下亦皆四形三邊弧三角弧互交成三角四角各種形正弧邊角互用取其連本形交角之三角形爲次形但除正角外以一角爲交角一角加減象限爲對弧即得次形矣若斜弧則惟於三角弧相交八形取之但用三外角或兩內角一外角則上下各有一形之三邊應之也即如前圖甲乙丙三角臚列已詳若設甲乙辛三角則三外角之應爲丑申壬次形其餘三次形爲兩內角一外角相應之三形設辛乙丁三

角則三外角之應爲丑心土次形其餘三次形爲兩內角一外角相應之三形設丁乙丙三角則三外角之應爲丑心酉次形其餘三次形爲兩內角一外角相應之三形故斜弧無論何形皆可用三外角亦可任用兩內角一外角

正弧以一角加減象限爲次形對弧定例

兩鋭恆置一象限減之

兩鈍恆置三象限減之

一鋭一鈍用鋭加一象限用鈍減去一象限

正弧算法

理爲求得次形上弧之正弦命爲本形下弧之餘弦法以交角之正弦爲一率餘角之餘弦爲二率半徑爲三率求得四率爲下弧之餘弦大小依相從條目定之得下弧再求上弧對弧並

依正弧三角法

斜弧算法

理爲求得次形三角以爲本形三邊凡本形之角爲次形邊即以其邊所對之角爲本形角所

對之邊凡本形之外角爲次形邊卽以其邊所
對角之外角爲本形角所對之邊法以半徑自
乘爲一率所求邊旁兩角餘割綫相乘爲二率
併邊旁兩角較半周餘弧之矢與對角矢相減
餘爲三率求得四率爲所求邊之矢或以邊旁
兩角相減餘弧之矢與對角外角之矢相減餘
爲三率求得四率爲所求邊較半周餘弧之矢
得一邊再求餘二邊并用垂弧省算法

平三角形

邊角比例鋭鈍知不知一條

凡平三角形知三角者不能求三邊知三邊者可以求三角知一邊二角一角二邊者皆可以求餘角餘邊知三邊求三角法置大邊爲底以中小邊併數乘中小邊較數大邊除之得分底邊較數分底邊較數與大邊相加折半爲分底大邊相減折半爲分底小邊又以小邊爲一率分底小邊爲二率半徑爲三率求得四率爲對中邊之角餘弦其角必鋭中邊爲一率分底大

邊爲二一率半徑爲三率求得四率爲對小邊之角餘併其角亦銳所對中邊對小邊二銳角去減半周餘爲對大邊之角知一角夾知一邊求餘角餘邊法併所知二角去減半周餘爲對所知邊之角再用對角求對邊法卽得餘二邊知二邊夾知一角求餘邊餘角法以所知二邊相併爲一率相減餘爲二率所知一角與半周相減餘半之爲半外角取其切綫爲三率求得四率爲半較角切綫其角必銳半較角與半外角

相加爲對所知大邊之角相減餘爲對所知小邊之角再用對角求對邊法卽得對所知角之邊知一角對知一邊知又一角對不知邊求餘角餘邊法併二角去減半周餘爲原不知之一角再用對角求對邊法卽得餘二邊知一邊對知一角鈍知又一邊對不知角求餘角餘邊法用對邊求對角法求得對所知又一邊之角必鈍併二角去減半周卽得原不知之又一角再用對角求對邊法卽得原不知之一邊以上五

題皆無鋭鈍遊移之慮惟知一邊對知一角鋭知又一邊對不知角者若求其角則有知不知之別

凡原所知邊大於又所知邊對角鋭則又所知邊所求對角亦鋭若原所知邊小於又所知邊對角鋭則又所知邊所求對角不能定

附錄邊角比例算法

對角求對邊

一率原所知角正弦

二率原所知對邊

三率又所知角正弦

四率所求對邊

對邊求對角法

一率原所知邊

二率原所知對角正弦

三率又所知邊

四率所求對角正弦

憶始塘吾友江蘘浦時蘘浦課以句弦和與中
容求諸數一題余攷自來算書有梅君循齋及
丁君維烈二法認題既誤布算自乖因思別立
正術思緒不來大爲蘘浦所窘戊午春夜與孟
嘉雨窗破寂覆拈此題略言其趣越日蘘浦自
山中讀書來既見斯編相視而咲想見初相見
時歙汪萊

第[illegible]冊

歙汪萊著

句股形 帶縱立方形附

有兩積相等兩句弦和相等求兩句股形各數

一句弦和一股弦和相等法同

法曰四倍句股積自乘句弦和除之得數為帶縱長立方積以句弦和為所帶之縱用帶縱長立方法開之得本方根數為兩句股形中兩句弦較之中率以中率自乘得數為帶縱平方積

又以中率與句弦和相減得數爲帶縱平方長闊和用帶縱平方長闊和法開之得長闊兩根爲兩句股形中兩句弦較數再用句弦較與句弦和求句股弦法即得兩句股形各數

解曰凡一句弦和任設一句弦較求得句股積必有又一句弦較所求之句股積與之相等或一股弦較所求句股積與之相等則句弦和變股弦和法同葢兩句弦較兩數及兩句弦較相併與句弦和相減之餘數必爲連比例之三率兩句弦較兩數必爲首末二率

句弦和
三率併數
句弦較　餘數　句弦較
首率　中率　末率

兩句弦較相併與句弦和相減之餘數必為中率句弦和必為三率併數此等積等句弦和得有兩形之故也（詳後有此形之句弦較求彼形之句弦較法）又凡一句股積必以句為一邊以股為一邊相乘折半

弦　句
句

得數若四倍之卽是以兩句相併為一邊以股為一邊相乘長方之積也今有兩句股形之積相等則是此形之句倍之為一邊以此形之股為又一邊可也以彼

形之句倍之為一邊彼形之股為又一邊可也若以四倍之積自乘之則即可視作此形之倍句乘彼形之倍句為底

又以兩形之股相乘爲高蓋此積本以倍句與股相乘爲一乘又以倍句與股相乘之數乘之爲再乘此再乘中卽可分作倍句爲再乘股爲三乘而凡三次之乘或此先而彼後或彼先而此後無不可故卽可視作倍句自乘爲一乘股爲再乘復爲三乘而此兩形之句股原可互用故卽可視作兩形之倍句相乘爲底兩形之股相乘爲高又凡句弦和開方得根之數與句弦較開方得根之數相乘卽得股數今此四倍句

股積自乘之立體既視作兩形之股相乘爲高若以句弦和除之即如以句弦和之根除過二次而此形即變爲兩句弦較各開方之根數相

乘爲高矣準前論句弦和爲三率併數兩形句弦較爲首末二率今此形以兩句弦較之根相乘爲高即是以首末二率之根相乘爲高夫首末二率之根相乘即中率也又準前論句弦和爲三率併數兩句弦較爲首末二率今此形之底原以

此形之倍句乘彼形之倍句兩形之倍句皆爲句弦和中減去句弦較之數即一爲三率中減去首率之數一爲三率中減去末率之數兩數相乘即有一中率自乘之方一首率乘中率長方一首率乘末

首 中 中 末

率長方同於中率自乘之方一末率乘中率長方皆以中率齊之則以中率爲闊以三率併數爲帶

中 中 三率併數

縱矣又準前論旣以中率爲高則恰成中率自

乘爲底三率併數爲帶縱之長立方故四倍句股積自乘句弦

和除之爲帶縱長立方積以句弦和爲所帶之縱求得中率也以此中率與句弦和三率併數相減自餘首末二率併數中率自乘之數卽同首末二率相乘之數以此數爲帶縱平方積自合以首末二率

併數爲長闊和故以中率自乘爲帶縱平方積

中率與句弦和相減餘爲長闊和用帶縱平方長闊和法求得長闊二根爲首末二率亦即爲兩形之兩句弦較也

中率有奇零求兩句弦較密數

法曰凡中率以帶縱立方開之得數遇有奇零不盡者不得不截其餘以求得帶縱平方長闊二根爲首末二率必有微差長根恆失之多闊根恆失之少用益實歸除法則可得其密數以前所得長根之數先就首位減去一數用其餘

數爲減過長根之數自乘得積又用句弦和倍之減去減過長根之數用其餘數以乘前自乘之積得數加入前帶縱立方積爲實句弦和自乘之數爲法除之視其得數較減過長根之數恰合則即爲密數矣若多則更當減少則不可減更當減則又減一數如前法求之如前法視之不可減則還其本數待次位之減次位三位以下若有多位皆如前法定之求闊根以前所得之數先就首位加一數爲加過闊根之數自

乘得積又用句弦和倍之減去加過闊根之數用其餘數以乘前自乘之積得數加入前帶縱立方積爲實句弦和自乘之數爲法除之視其得數較加過闊根之數恰合則卽爲密數矣若多則更當加少則不可加更當加則又加一數加前法求之如前法視之不可加則還其本數待次位之加次位三位以下若有多位皆以前法定之此一加一減之法皆以中率爲限長根之減不得過中率以下闊根之加不得過中率

以上則長闊不至相淆雖有奇零之數皆無慮

其不合矣

解曰前帶縱立方積本以倍句乘股爲底復以

股自乘

倍句

倍句

倍句乘股爲高底高相乘句弦和除之之數也就句弦和末除之先主乘之乘互易觀之即可

視作倍句自乘為底股自乘為高然句弦和與句弦較相乘即如股自乘之數則就句弦和旣除之後觀之即可視作倍句自乘為底句弦較為高夫此倍句視作首中二率則句弦較必為末率此倍句視作中末二率則句弦較必為首率若以末率自乘再乘為隅倍首中二率乘末率自乘之數為兩廉加入倍句自乘為底句弦較為高之積即成三率併數自乘為底末

率爲高之積二率併數之句弦和自乘得數除

之必得末率之句弦較矣

或以首率自乘再乘爲隅

倍中末二率乘首率自乘

之數爲兩廉加入倍句自

乘爲底句弦較爲高之積

卽成三率併數自乘爲底

首率爲高之積三率併數之句弦和自乘得數

除之必得首率之句弦較矣而今所得長闊二

根爲首末二率皆有微差故益實之時必須加減其長恆失之多闊恆失之少者緣中率既截奇零已失之少自乘爲帶縱平方積則積亦少及與句弦和相減餘爲長闊和又失之多積失之少而長闊和失之多則長闊較必失之多而長恆失多闊恆失少矣益實之時失多用減失少用加加減不過中率皆易明也其以除得數恰合加過減過之根爲密而多則更加減少則還本數者由相補之積有定限試以長根命爲

首率闊根命為末率帶縱立方積命為中末二率併數自乘為底首率為高之積觀之設三率併數自乘之方為範以中末二率併數自乘為底首率為高之積置於中末二率併數之方又以末率自乘再乘為隅末率自乘乘倍首中二率併數為兩廉之曲矩形置於所設範對中末二率併數方角之兩旁其間必空首末二率之

較乘首中末中四率併數之曲矩形為底末率為高之積若以末率之數截立方之下體取其上之餘積以補之其高為首末二率之較即合空曲矩形之闊其底羃析之為四形一末自乘合空曲矩之末率高乘末率長二一末乘中合空曲矩之末率高乘二一中率長一中自乘合空曲矩之末率高乘首率長如此相補適足一末率為高三率併數自乘為底之立方形以三率併數自乘之方除之得末率之數自無多少不合

矣而或原所設之末率微差而少則以所截立方形首末二率相較數之高對空曲矩形首末二率相較數之闊亦無不合而空曲矩形中四段積之立冪則為末率微少之數乘中率之長二較立方之冪末率不差之數乘二中率者少矣為末率微少數乘末率長一較立方冪末率不差之數自乘者少矣為末率微少之數乘首率微多之長一而首率之微多僅以末率微少之數為長末率之微少直以首率不差之數為

長微多微少之數雖恰相同而一長一短之積不足相補則較立方羃之中率自乘同於末率不差乘首率不差之數者又少矣夫以所截立方積之多補入空曲矩之少其積必浮而出以三率倂數自乘之方除之所得之數能不多於所設之數乎故以除得之數多於所設之數定知設數之尙少所當更加者也又或原所設之末率微差而多則以所截立方形首末二率相較數之高對空曲矩形首末二率相較數之闊

亦無不合而空曲矩形中四段積之立冪為末
率微多之數棄中率之長二較立方之冪末率
不差之數棄二中率者多矣為末率微多數棄
末率長一較立方冪末率不差之數自棄者多
矣為末率微多之數棄首率微少之長一而首
率之微少僅以末率不差之數為長末率之微
多直以首率微少之數過於中率者為長微多
微少之數雖恰相同一長一短之積不足相消
則較立方冪之中率自棄同於首率不差棄末

率不差之數者又多矣夫以所截立方積之少
補入空曲矩之多其積必減而下以三率併數
自乘之方除之所得之數能不少於所設之數
乎故以除得之數少於所設之數定知設數之
已多所當還其本數者也至於求首率法若減
數過多設數微差而少與末率加多之形絲豪
無異故反以除得之數少於所設之數定知設
數之已少所當還其本數者也其正當首率無
差則所益之曲矩形積以首率自乘再乘爲隅

亦以首率自乘乘倍中末二率併數爲兩廉合於中末二率併數自乘爲底首率爲高之立方積恰成一三率併數自乘爲底首率爲高之立方積中間始無空凹矩兩高始無不齊不須截彼補此以三率併數自乘之方除之必恰得首率之數亦無多少不合矣然或減數尚少設數微差而多則所益之凹矩形積以首率微多之數爲闊亦以首率微多之數爲高必須抉出向內首率所多之數爲闊首率微多之數爲高之

曲矩形乃能合首率爲高中末二率併數自乘
爲底之立方積同容於三率併數自乘之方內
而立方積之高較之曲矩之高則少首率所多
之數取抉出曲矩以首率所多之數爲闊對空
立方以首率所多數爲高亦無不合而抉出曲
矩四段積之立冪爲首率微多乘末率之長二
較空立方冪末率不差乘二中率不差者多矣
爲首率微多乘中率之長一較空立方冪中率
不差自乘者多矣爲首率微多乘中率微少之

長一此段內雖所少之數以首率為長所多之數以中率微少之數為長不能相補成首率不差乘中率不差之數而取第三段首率所多之數乘中率之積以補此段中率之所少即其下截已成中率不差之自乘較空立方冪末率自乘者必多矣夫以抉出曲矩之多補入空立方之少其積亦必浮而出以三率併數自乘之方除之所得之數亦必多於所設之數故反以除得之數多於所設之數定知設數之尚多所當

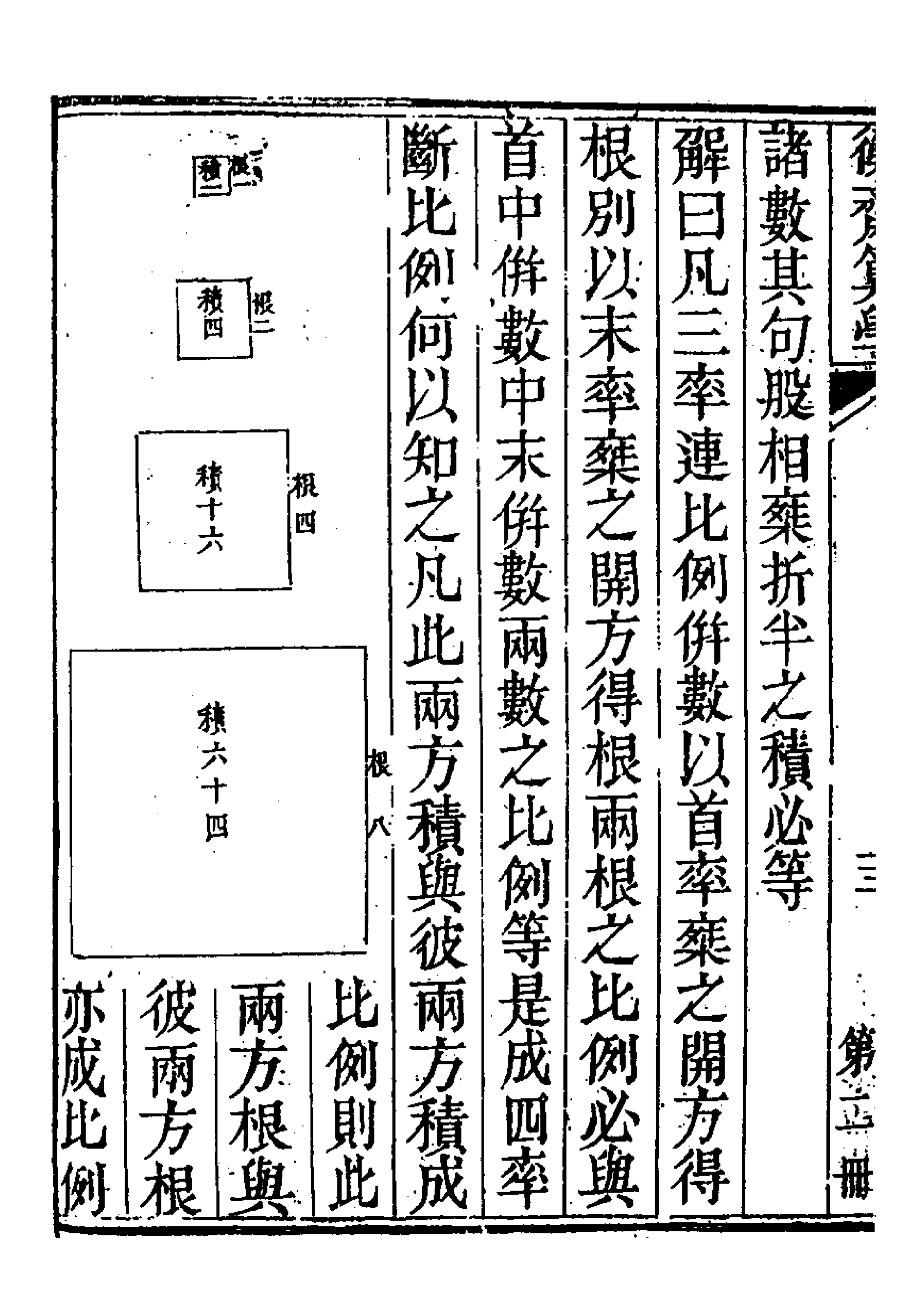
更減者也

有兩句弦和相等有此形之句弦較求等積兩句股形彼形之句弦較及兩形相等之積（一句弦和一股弦和相等法同）

法曰此形句弦較與句弦和相減餘爲此形之倍句倍句與句弦較相乘爲帶縱平方積句弦較爲所帶之縱用帶縱平方法開之得闊邊爲兩形兩句弦較之中率此形倍句減去中率卽得彼形句弦較兩較各與句弦和求得句股弦

諸數其句股相乘折半之積必等

解曰凡三率連比例併數以首率乘之開方得根別以末率乘之開方得根兩根之比例必與首中併數中末併數兩數之比例等是成四率斷比例何以知之凡此兩方積與彼兩方積成



比例則此兩方根與彼兩方根亦成比例

今此兩根之方積一以首率乘三率併數一以

首率
三率併數

末率
三率併數

首率
中率

首率
四率併數

末率乘三率併數其長皆同以三率併數則其差分惟在闊之首末二率矣若以首中併數爲根自乘得方積則其中有首率自乘一首率乘中率二中率自乘一同於首率乘末率一以首率齊之則首率爲闊首末中中四率併數爲長以中末併數

為根自乘得方積則其中有
末率自乘一末率乘中率二
中率自乘一同於末率乘首
率一以末率齊之則末率為

中率
末率

首率
四率併數

闊亦首末中中四率併數為長兩積之差分亦
惟在首末二率是此兩方積與彼兩方積比例
等矣積之比例既等根之比例有不等乎故必
成四率斷比例也凡斷比例四率若交互乘之
其積必等今句弦和內減去句弦較其餘即為

倍句句弦較相乘句弦和開方得股是句弦和爲
三率併數之象兩積相等之兩句弦較爲首率
與末率之象兩積相等之兩倍句爲首中併數
及中末併數之象兩積相等兩句弦較之併數
與句弦和相減餘必爲中率之象兩積相等之
兩股一爲首率與三率併數相乘開方之象一
爲末率與三率併數相乘開方之象而首率所
得之股其倍句必爲中末二率末率所得之股
其倍句必爲中首二率於四率斷比例中皆爲

斜對然後相乘之積必等矣故句弦和中截此形句弦較為首率其餘倍句為中末併數以首率乘中末併數有一首率乘中率長方有一首率乘末率長方同於中率自乘之方兩方相就成中率為闊首率為帶縱之長方矣故以此形句弦較乘倍句為帶縱平方積句弦較為所帶之縱用帶縱平方法開得闊根即為兩積相等兩句弦較之中率以減倍句得末率即為彼形之句弦較也

有兩句弦較求等積兩句股形相等之句弦和

法曰以兩句弦較相乘開方得中率中率與兩句弦較相併得數爲等積兩句股形共得之句弦和數

有等積等高闊和數求兩帶縱扁立方形諸數

一長立方高闊和一扁立方高闊和相等法同

法曰命積爲帶縱長立方積以高闊和爲所帶之縱用帶縱長立方法開得本方根爲兩形高數之中率中率與高闊和相減餘爲帶縱平方

之長闊和中率自乘爲帶縱平方積用帶縱平方長闊和法開之得長闊二根爲兩形之兩高數兩高與和相減爲兩闊數理解並同等積等句弦和兩句股法

有股弦和句股積求諸數

法曰如前兩句弦和相等兩句股積相等法求得闊根卽爲股弦較用股弦較與股弦和求句股弦法卽得諸數

解曰準前論等積等弦和得有兩形由弦和中

含此例連三率兩弦較當首末二率而連三率
之理末率不及三率併數三分之一者首率必
過三率併數三分之一股弦較之法則必在股
弦和十二分有奇之二有奇以下斷不及股弦
和三分之一故首末二率其一爲股弦較者其
一必爲句弦較三率併數此形爲股弦和者等
積之彼形必爲句弦和不至有兩積相等兩股
弦和相等之相消而凡句弦和與句股積遇有
求得闊根變爲股弦較者亦不至有兩積相等

兩句弦和相等之互易矣又前法既以長闊二根得首末二率則股弦較不及三率併數三分之一者必當闊根故以闊根得股弦較也

有帶縱長立方高闊和帶縱長立方積求高闊兩數

法曰如前兩帶縱扁立方等積等高闊和法求得長根爲高以高減高闊和爲闊

解曰等積等高闊和之兩帶縱立方形兩高數恆爲首末二率高闊和恆爲三率併數與等積

等弦和之兩弦較及弦和絲豪無異而連三率之理首率過三率併數之半者其餘中末併數尚不及半何況末率帶縱長立方之法則高必過高闊和之半斷無在半以下之事故首末二率其一為長立方之高者其一必為扁立方之高三率併數此形為長立方之高闊和者等積之彼形必為扁立方之高闊和不至有兩積相等兩長立方高闊和相等之相淆而扁立方高闊和與積有求得長根變為長立方之高者亦

不至有等積等扁立方高闊和之互易矣又前
法之求兩高既以長闊二根則長立方之高過
高闊和之半者自當長根故以長根得立方高
也
論曰句股形等積等弦和帶縱立方形等積等
高闊和皆有兩形互易雖股弦和所通在句弦
和長立方所通在扁立方幸有名之可辨然其
數莫不由兩形相引而出至如句弦和有時所
通亦句弦和句二十股二十一弦二十九句弦和四十九句股積二百一十句十

二股三十五弦三十七句弦和亦四十九句股積亦二百一十扁立方有時所通亦扁立方高九闊十高闊和十九立方積九百高四闊十五高闊和亦十九立方積亦九百若問者暗執一形則對者交盲兩數循齋諸君見未及此謂以理推之和數與較數有對待者遂意此和此積之僅有一形苦思力索法成而不可用惜哉栩君循齋法見增删算法統宗丁君維烈法見赤水遺珍